Leçon 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Tauvel
Gourdon
Briane - Pagès
Isenmann - P. (dev 1)

I. Interversion limite - limite

On considère X un ensemble et E un espace vectoriel normé

1. Notion de convergence uniforme [Tau]

Définition 1.1 On dit qu'une suite $(f_n)_n$ de fonctions $X \longrightarrow E$ converge uniformément sur X s'il existe $f : X \longrightarrow E$ telle que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Proposition 1.2 La convergence uniforme implique la convergence simple.

Contre-exemple 1.3

$\forall n \in \mathbb{N}, \ f_n := [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto x^n$

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\{1\}}$ mais pas uniformément

Définition 1.4 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X sur E. On dit que $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant n_0, \sup_{x \in X} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon$

Théorème 1.5 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de X sur E alors $(f_n)_n$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

2. Convergence uniforme et continuité [Tau]

On considère (X, d) espace métrique.

Théorème 1.6 Soient $x \in X$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{K}$ continues en x. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f, alors f est continue en x.

Corollaire 1.7 Si une suite de fonctions continues converge uniformément sur X, sa limite est continue sur X.

Corollaire 1.8 Si E est un Banach, $(C_b^0(X, E), \|.\|_\infty)$ est un Banach.

3. Convergence uniforme et dérivabilité [Gou]

Théorème 1.9 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de classe C^1 d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach E. On suppose que :

(i) il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge

(ii) la suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 et vérifiant $f' = g$.

Contre-exemple 1.10

sur $[-1, 1]$, $x \longmapsto |x|$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales, mais n'est pas dérivable

Remarque 1.11 Le théorème reste vrai en remplaçant "de classe C^1" par dérivable.

Corollaire 1.12 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_n$ une fonction de classe C^p de $[a, b]$ dans un espace de Banach E. On suppose que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers une fonction g_k. Alors la limite uniforme $f = g_0$ de $(f_n)_n$ est une fonction de classe C^p et pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$.

II. Interversion limite - intégrale

On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Théorème de convergence monotone [BP]

Théorème 2.1 (Beppo-Levi ou convergence monotone) Soit $(f_n)_n$ une suite croissante d'

éléments de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$. Alors $f := \lim_n f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f \, d\mu = \lim_n \uparrow \int_X f_n \, d\mu$.

Contre-exemple 2.2

cas négatif : $f_n := -\mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ ne vérifie pas l'interversion désirée

cas décroissant : $f_n := \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ ne vérifie pas l'interversion désirée

Application 2.3 L'intégrale de Lebesgue est linéaire.

Exemple 2.4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne alors $\lim_{n\to+\infty} n \int_0^1 \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}} \, dt = +\infty$

2. Convergence dominée [BP]

Théorème 2.5 (lemme de Fatou) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ alors

$$0 \leqslant \int_X \liminf f_n \, d\mu \leqslant \liminf \int_X f_n \, d\mu.$$

Application 2.6 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et telle que $\sup_n \int_X |f_n| \, d\mu \leqslant C$. Alors f est intégrable.

Théorème 2.7 (convergence dominée) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables vérifiant :

(i) f_n converge simplement dans $\mathbb{K}$ μ-p.p. vers une fonction f

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ μ-p.p.

Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_n \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Application 2.8 Soit $\alpha > 1$ alors $I_n(\alpha) := \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\alpha x} \, dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$.

Application 2.9 Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de fonctions mesurables. Si $\sum_n \int_X |\varphi_n| \, d\mu < +\infty$ alors $\sum_n \varphi_n$ est μ-intégrable et $\int_X \sum_n \varphi_n \, d\mu = \sum_n \int_X \varphi_n \, d\mu$.

Application 2.10 (lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n$ une suite de parties de $\mathcal{A}$

alors : si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, $\mu(\limsup A_n) = 0$.

3. Régularité sous le signe intégrale [BP]

On considère (M, d) un espace métrique. On considère $f : M \times X \longrightarrow \mathbb{K}$.

Théorème 2.11 (continuité sous le signe intégrale) Soit $u \in M$. Si :

(i) $\forall v \in M$, $x \longmapsto f(v,x)$ est mesurable

(ii) pour μ presque tout $x \in X$, $v \longmapsto f(v,x)$ continue en u

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\forall v \in M$, $|f(v,\cdot)| \leqslant g$ μ-p.p.

Alors la fonction $F := \int_X f(\cdot, x) \, d\mu(x)$ est définie sur E, continue en u.

Application 2.12 La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est continue.

Théorème 2.13 (dérivation sous le signe intégrale) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ~~et soit $u \in I$~~. Si la fonction f vérifie :

(i) $\forall v \in I$, $f(v,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii) $\partial_1 f(v,\cdot)$ existe μ-pp. pour tout v

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\forall v \in I$, $|\partial_1 f(v,\cdot)| \leqslant g$

alors la fonction F est définie sur I, dérivable sur I et : $F'(u) = \int_X \partial_1 f(u,x) \, d\mu(x)$.

Remarque 2.14 On peut en donner une version C^1.

Application 2.15 (équation de la chaleur)

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction de coefficients de Fourier $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Il existe alors une une unique fonction $u : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall t > 0$, $u(t,\cdot)$ est 2π-périodique

(ii) $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(iii) $\partial_t u = \Delta_x u$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

(iv) $u(t,\cdot) \xrightarrow[t\to 0]{} u_0$ en norme $L^2(\mathbb{T})$

Le cas échéant, u est de classe C^∞.

développement 1

III - Interversion intégrale - intégrale [BP]

Théorème 3.1 (Fubini - Tonelli) - admis Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ mesurable. Alors :

(i) les fonctions partout définies $x \longmapsto \int_Y f(x, .)\, d\nu$ et $y \longmapsto \int_X f(., y)\, d\mu$ sont respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ - mesurables

(ii) $\displaystyle\int_{X \times Y} f \, d\mu \otimes \nu = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Contre-exemple 3.2

cas non σ-fini : soient δ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ et $f : (x,y) \longmapsto \mathbb{1}_{x=y}$ alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\delta(x)\, d\lambda(y) = +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, d\lambda(y)\, d\delta(x) = 0$$

Exemple 3.3

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Théorème 3.4 (Fubini - Lebesgue) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés et $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ intégrable. Alors :

(i) pour μ - presque tout $x \in X$, $y \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$ idem pour $x \longmapsto f(x,y) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii) $x \longmapsto \int_Y f(x, .)\, d\nu \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $y \longmapsto \int_X f(., y)\, d\mu \in \mathcal{L}^1(\nu)$

(iii) les égalités de Fubini - Tonelli restent vraies.

Contre-exemple 3.5

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx\, dy = -\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy\, dx = \frac{\pi}{4}$$

développement 2

Application 3.7 (intégrale de Fresnel) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Application 3.8 Soient $f, g \in L^1$ alors $f * g \in L^1$.